f Best N

مدار II : ۹۰/۹/۹

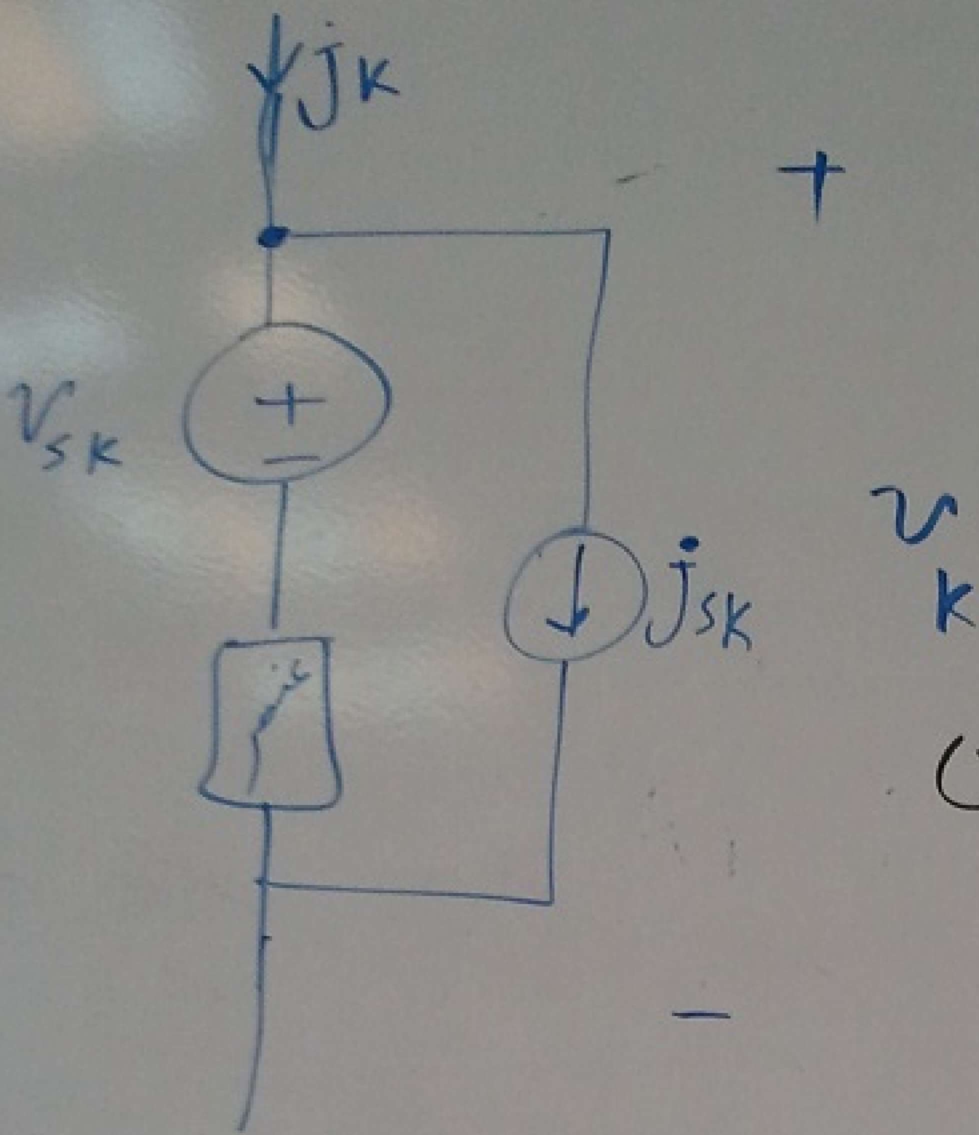
فصل گراف :

هدف : تمام کارهایی که در KVL , KCL انجام می‌شود را به صورت ماتریسی بنویسیم تا بتوان به کمک کامپیوتر KVL و KCL را نوشت.

تعریف عنصر استاندارد :

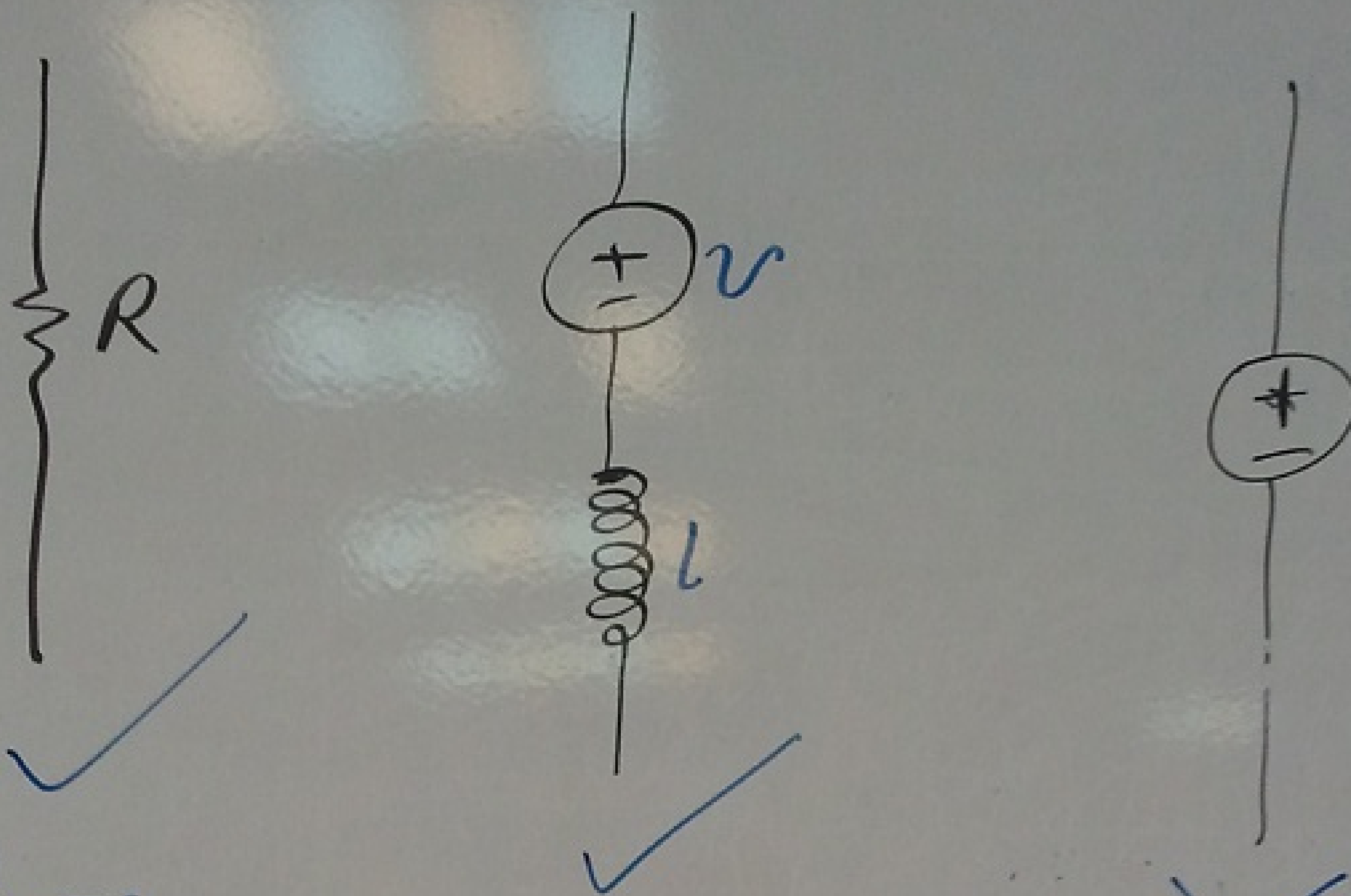
عنصر است
منبع و
عنص
مواز
اس
مثال

In the name of



عنصر استاندارد یک
منبع ولتاژ سری با یک
عنصری است که
موازی با یک منبع جریان
است.

مثال: کدام یک از عناصر زیر استاندارداند:



$$\begin{cases} v_{sk}=0 \\ i_{sk}=0 \end{cases}$$

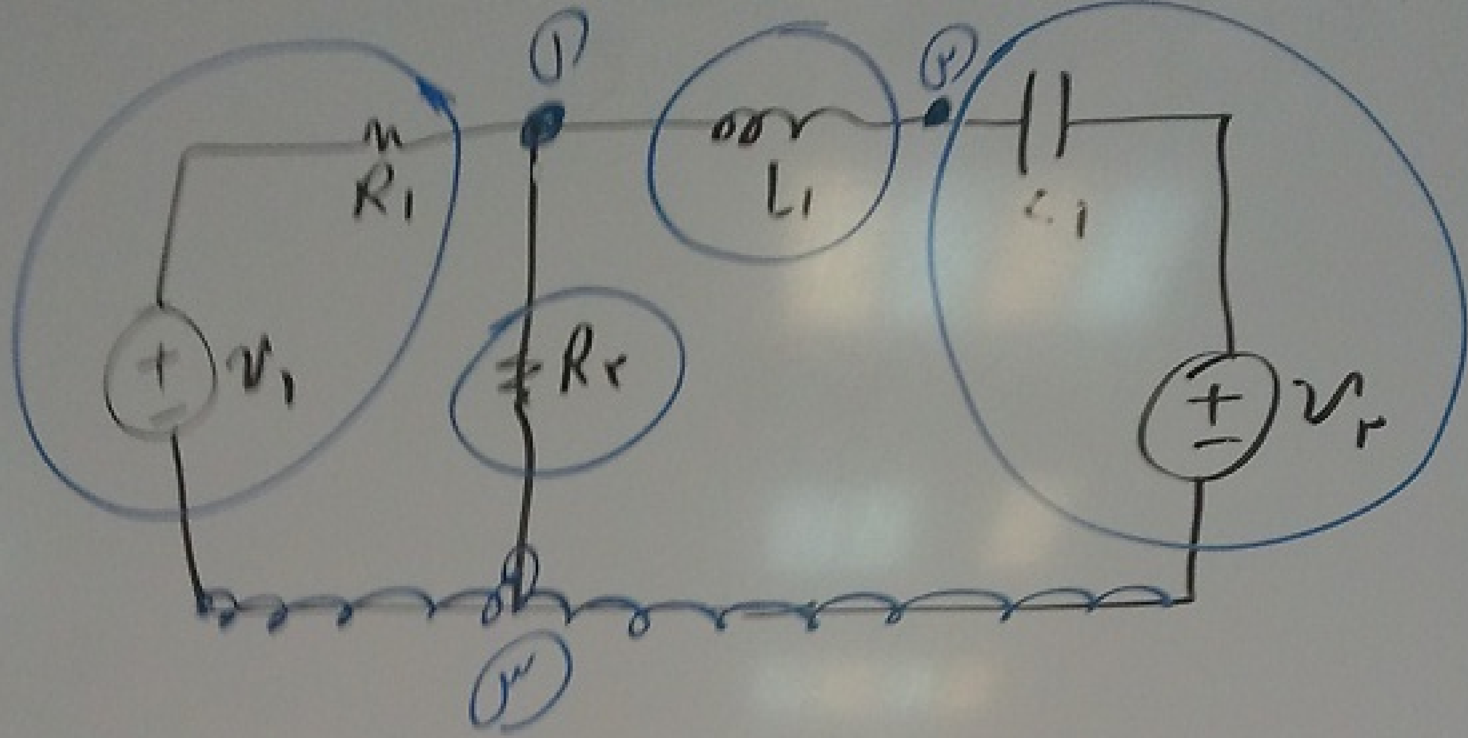
$\{ i_{sk}=0$

حتماً باید عنصر داشته باشد.

تعریف گره برای گراف:

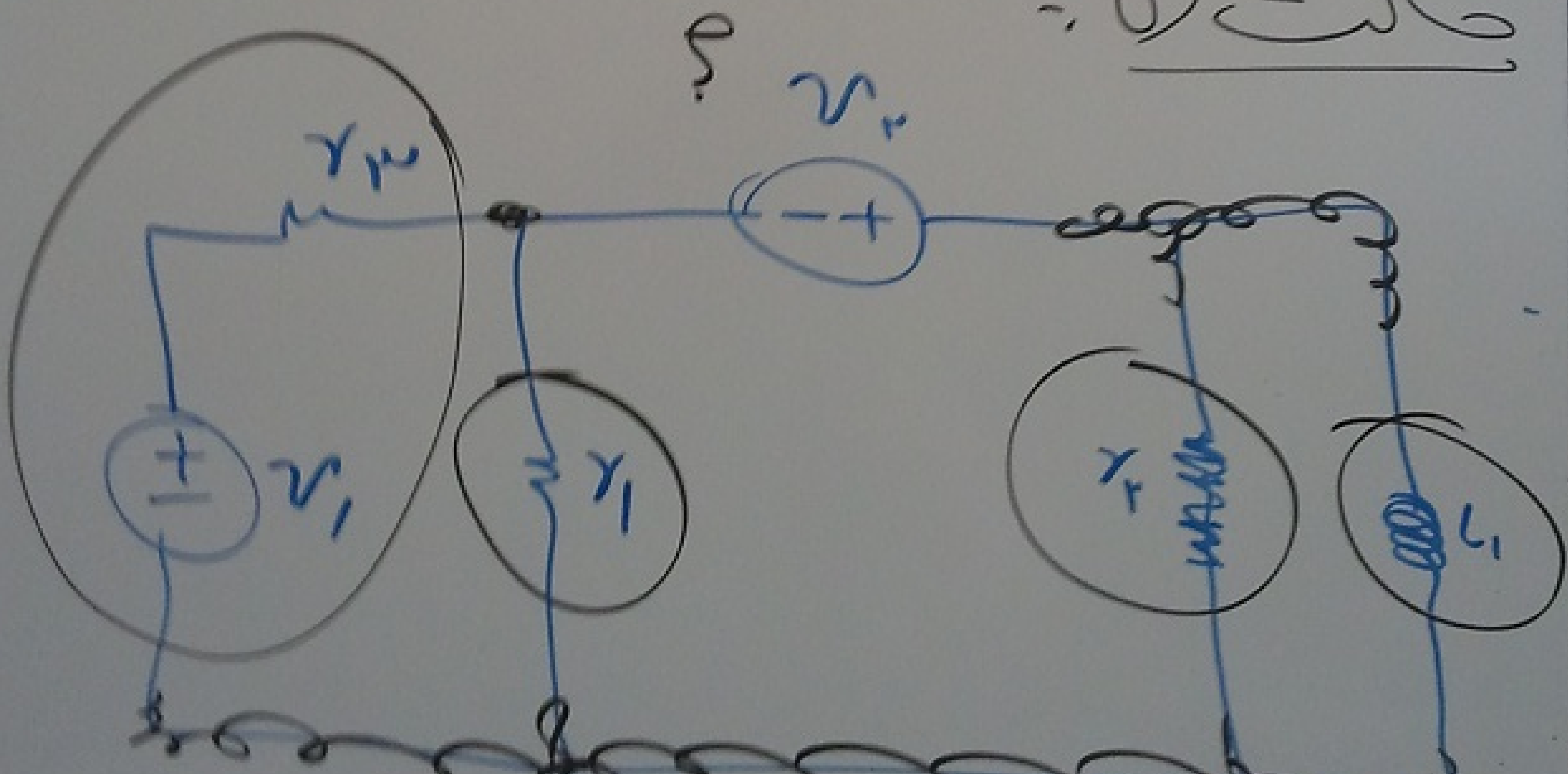
هر عنصر استاندارد باید بین دو گره باشد.

مثال: در شبکه زیر گره ها و عناصر استاندارد را مشخص کنید

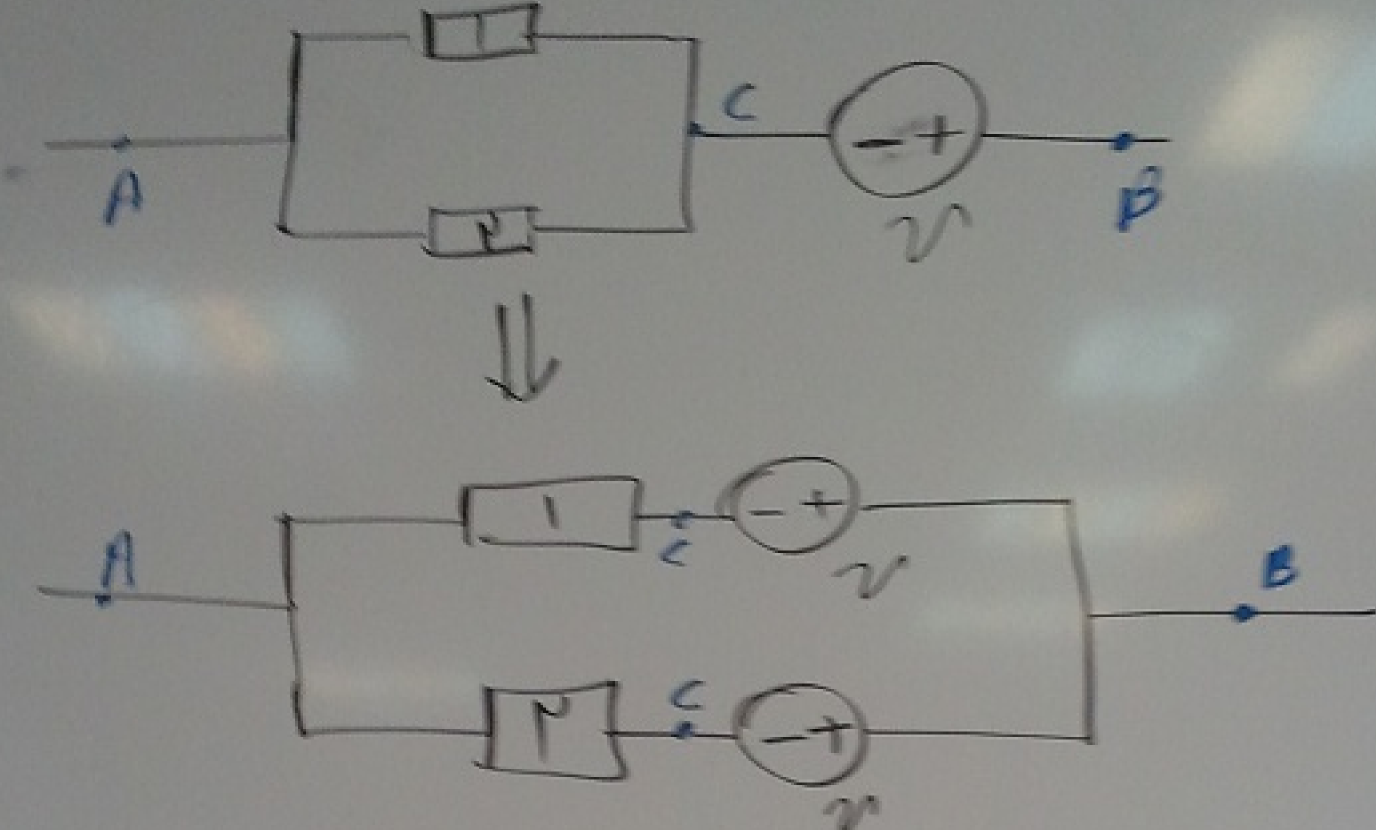


۴ حالت مشکل داریم:

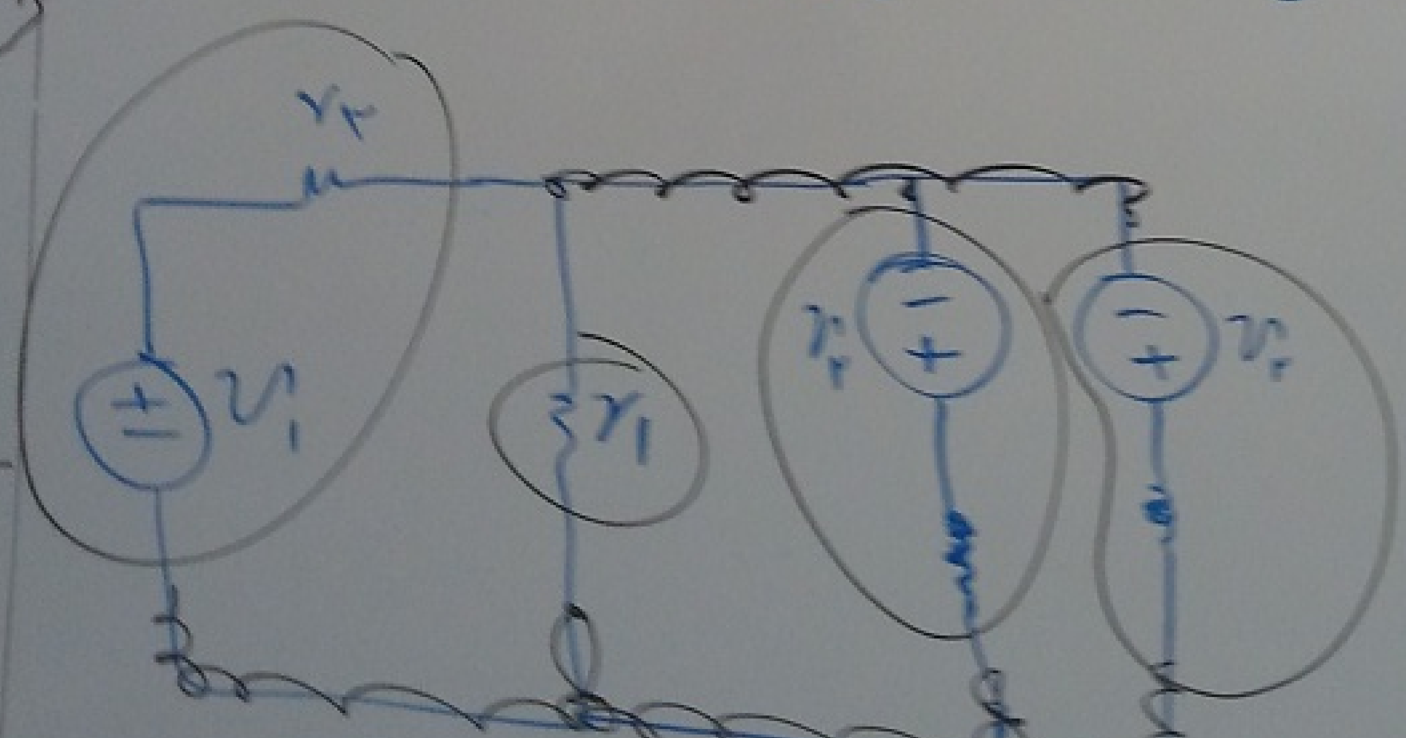
حالت ①:



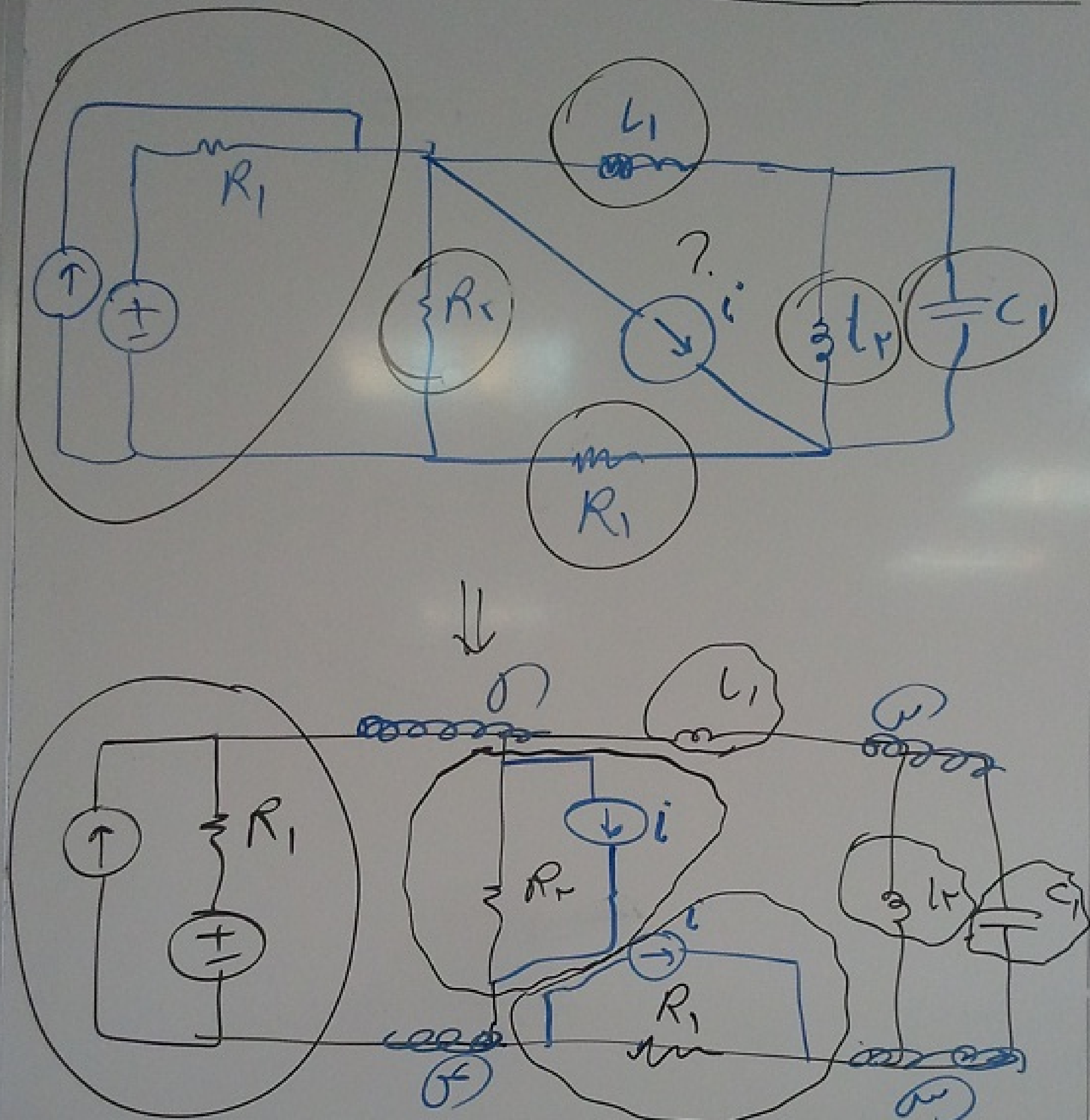
منبع ولتاژی بین دو گره باشد از قانون زیر استفاده می کنیم



پس مدار سوال قبل به صورت زیر می شود:

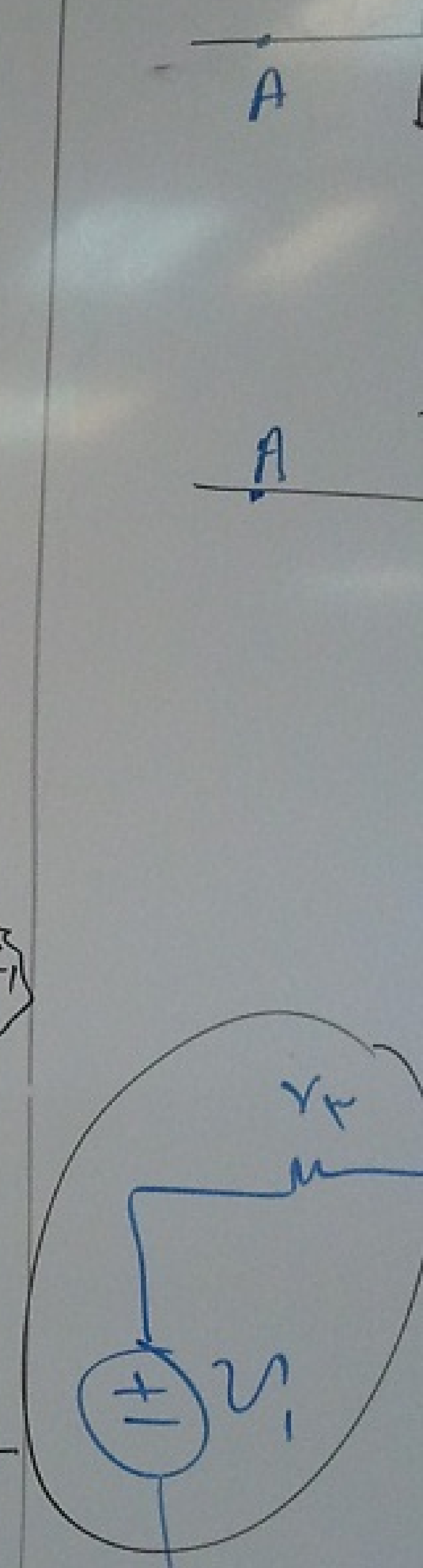


حالت دوم: منبع جریان بین دو گره:



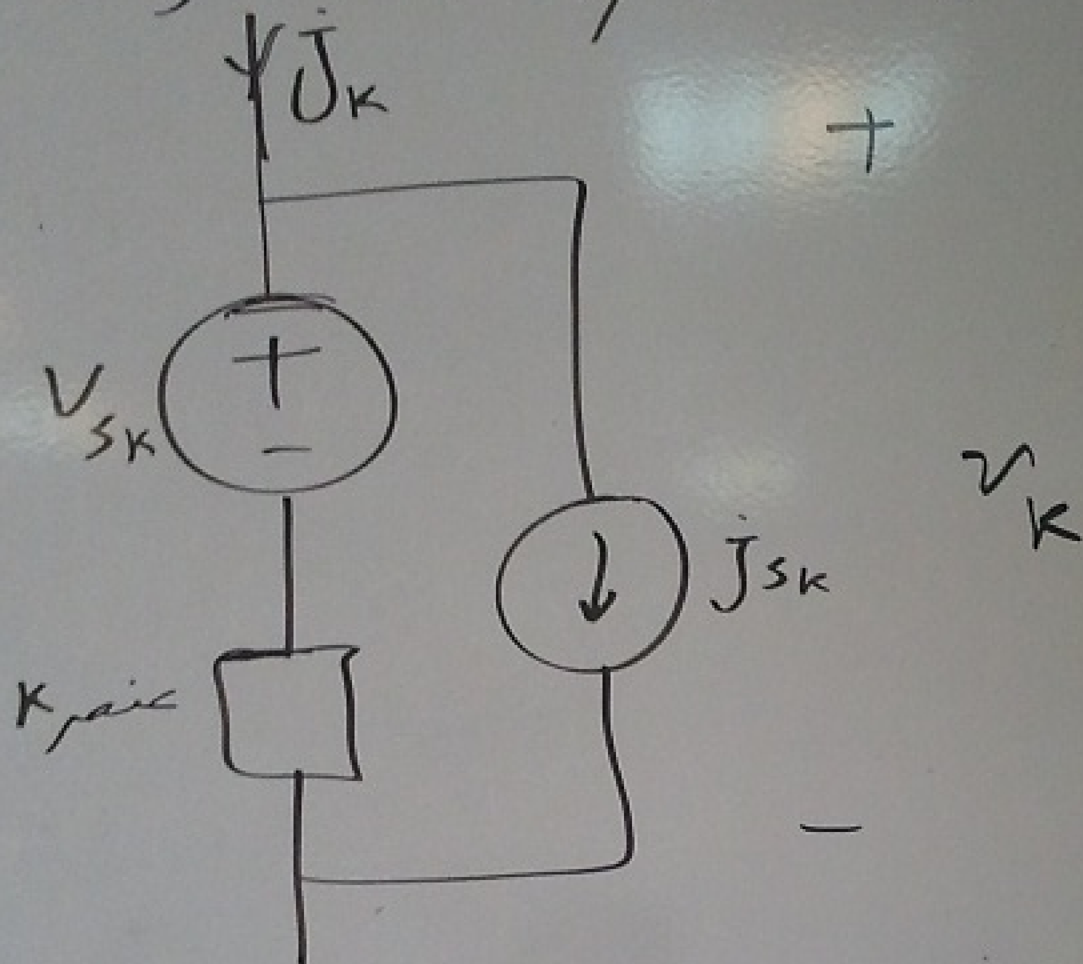
دو حالت: عنصر موازی با منبع ولتاژ حذف

عنصر سری با منبع جریان حذف می‌شود.



Best

نکته: به جهت ولتاژها و جریان‌ها دقت کنید:



v_{sk} هم جهت v_k

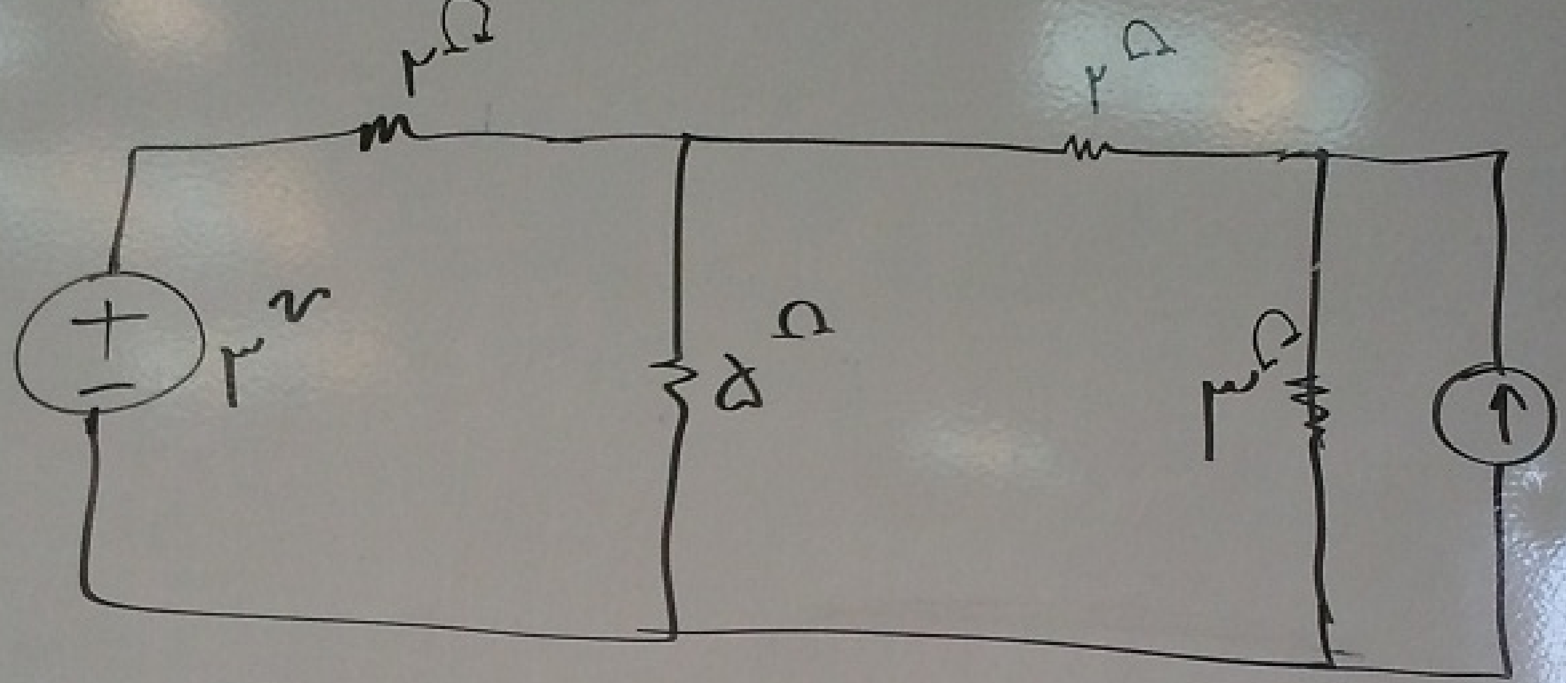
v_{sk}: ولتاژ منبع ولتاژ شاخه

v_k: ولتاژ شاخه

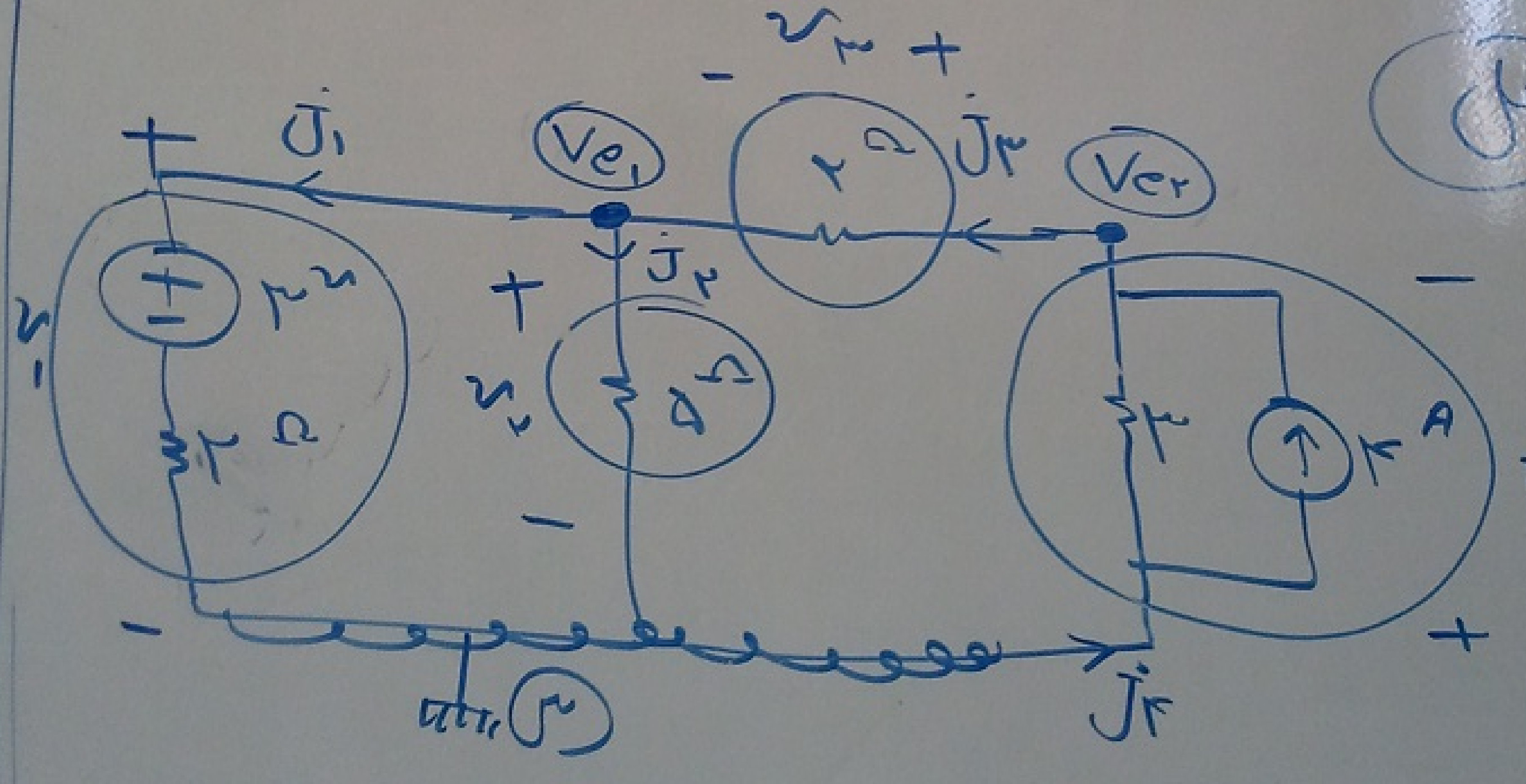
وارده از سر مثبت J_{sk} هم جهت J_k

In the name of

مثال: در شکل زیر مدار را استاندارد کنید با توجه به جهتها!



حل



Just for you

جواب

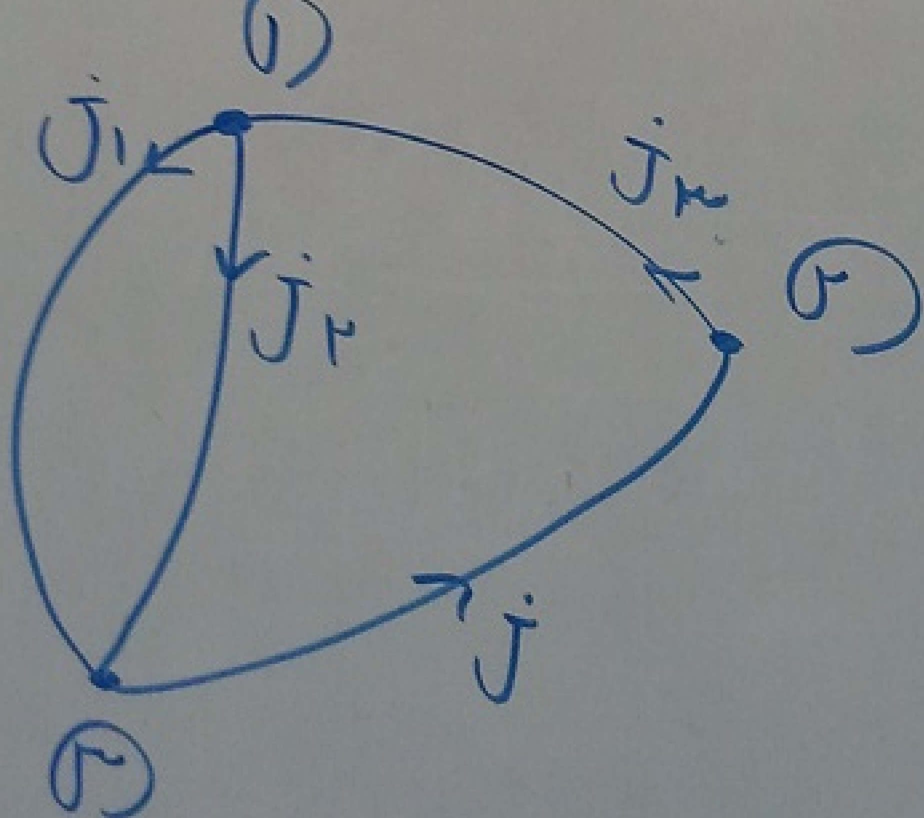
سوال: در مسأله قبل $J_4 = J_3$. آیا می توان J_4 را نگذاشت و همان J_3 گرفت؟

حل

خیر باید برای هر عنصر استاندارد یک جریان مجزا در نظر گرفت

سوال: شبکه مسأله قبل را به صورت یک گراف بکشید. جهتها را رعایت کنید.

حل



به ازای هر گره در مدار یک گره در گراف

به ازای هر عنصر استاندارد در مدار یک

شاخه در گراف داریم.

سؤال: ماتریس اتصال گره ها و شاخه ها را بنویسید

در مسأله قبل.

حل

ماتریس $\hat{A}$ ماتریس تلاقی گره شاخه

گویند و به صورت زیر تعریف می گردد:

شاخه ها

$$\hat{A} = \text{گره ها}\begin{bmatrix} \text{وارده به گره } -1 \\ \text{خارج شده از گره } 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ \end{array}$$

$$\hat{A} = \begin{array}{c|cccc} & j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

سؤال: چرا ماتریس $\hat{A}$ در معادلات گراف وارد نمی‌شود و ساده شده‌ی آن (حذف سطر مربوط به گره زمین) استفاده می‌شود؟

حل

چون گره زمین دارای ولتاژ معلوم صفر است پس نیازی به وارد کردن در معادلات گراف نیست. ماتریس مورد استفاده A است:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{cccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c|cccc} & J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

ماتریس مختصر شده تلاقی شاخه-گره از حذف سطر مربوط به گره زمین از $\hat{A}$ بدست می‌آید که با A نمایش می‌دهیم

سوال: ماتریس مربوط به عبارتهای زیر را بنویسید:

v بردار ولتاژ شاخه ها

j بردار جریان شاخه ها

v_s « ولتاژ منابع ولتاژ شاخه ها

j_s « جریان منابع جریان شاخه ها

e « ولتاژ گره ها

در مسأله قبل:

ضمناً مرتبه هر ماتریس را به تعداد گره ها و شاخه مرتبط کنید.

حل

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{\text{تعداد شاخه ها}} \quad \text{و} \quad j = \underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{\text{تعداد شاخه ها}}$$

$$v_s = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{\text{تعداد شاخه ها}} \quad \text{و} \quad j_s = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{4\times1}}_{\text{تعداد شاخه ها}} \quad \text{و} \quad e = \underbrace{\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \end{bmatrix}_{2\times1}}_{\text{تعداد گره ها بجز زمین}}$$

Best

سوال: اگر تعداد گره ها به جز زمین n تا باشد و تعداد شاخه ها b تا باشد، ابعاد ماتریس V و J و V_s و J_s و e و A را تعیین کنید؟

حل

$V_{b\times 1}$

$J_{b\times 1}$

${V_s}_{b\times 1}$

${J_s}_{b\times 1}$

$e_{n\times 1}$

$A_{n\times b}$

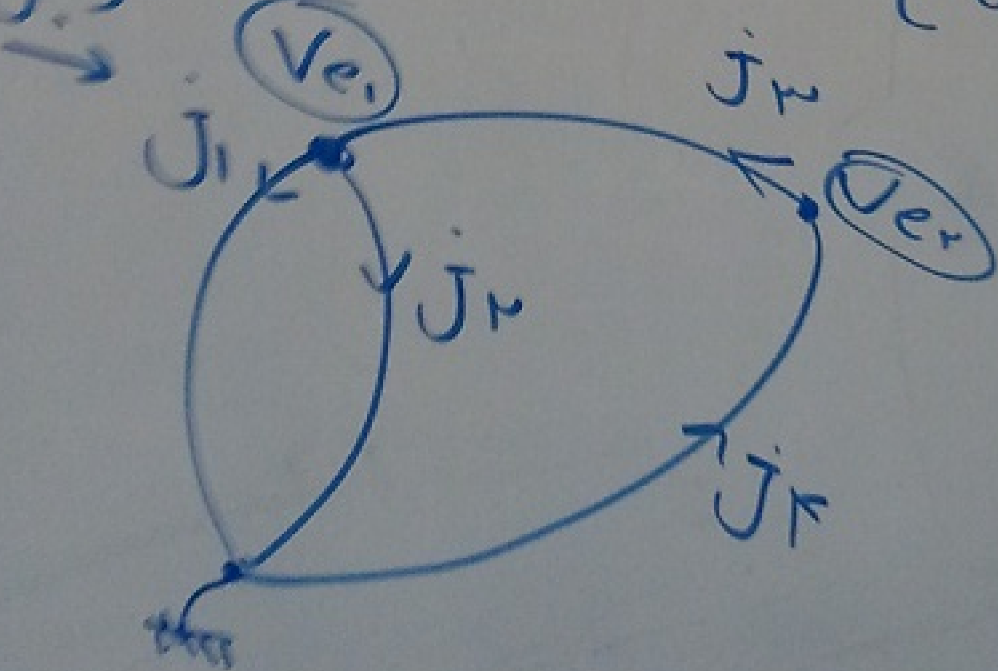
In the name of

سؤال: با توجه به ماتریس A و $\dot{J}$ که در سؤال‌های قبل بدست آوردید حاصل $A\dot{J}$ را حساب کنید و نتیجه‌گیری کلی کنید. بگویید که $A\dot{J}$ چه ماتریسی را نشان می‌دهد؟

حل

$$A\dot{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \\ \dot{J}_3 \\ \dot{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_1 + \dot{J}_2 - \dot{J}_3 \\ \dot{J}_3 - \dot{J}_4 \end{bmatrix}$$

از قبل



Just for God

جواب

$$= \begin{bmatrix} \dot{j}_1 + \dot{j}_2 - \dot{j}_3 \\ \dot{j}_3 - \dot{j}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جمع جریانهای خارج از گره ۱} \\ \text{جمع جریانهای خارج از گره ۲} \end{bmatrix} =$$

$$A\dot{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همیشه $A\dot{j} = 0$.

$A\dot{j}$ در واقع بردار جمع جریانها خارج از گره ها

هستند که صفر هستند.

سوال: با توجه به ماتریس‌های بدست آمده

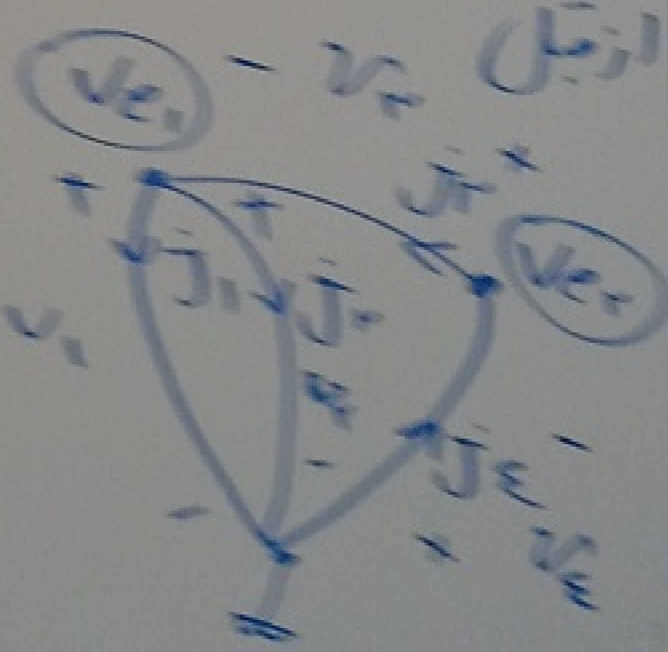
حاصل $A^T e$ را حساب کنید و بگویید چه

ماتریسی می‌شود.

حل

$$A^T \times e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e1} \\ -v_{e1}+v_{e2} \\ -v_{e2} \end{bmatrix} =$$



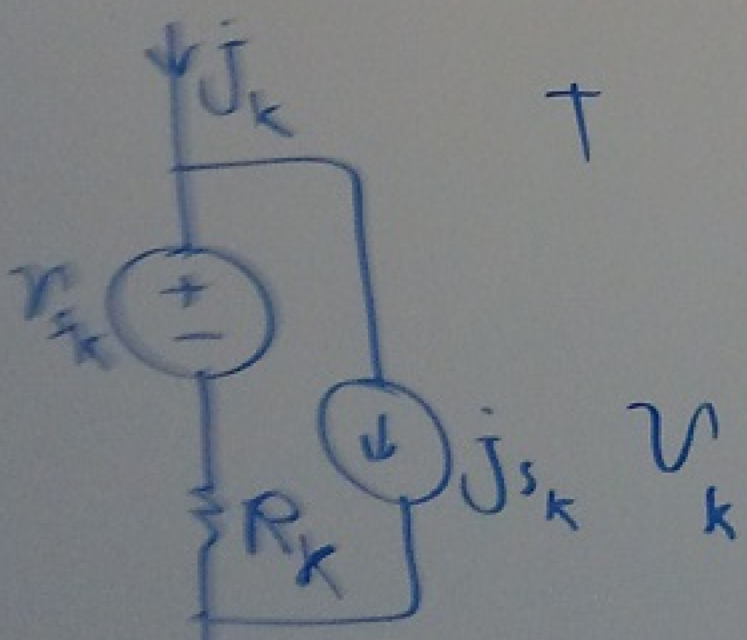
$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = v$$

$A^T e = v$

پس در حالت کلی رابطه بالا را داریم:

سؤال: فرض کنید شبکه ای داریم که DC است و عناصر آن استاندارد شده است. برای هر عنصر KVL بنویسید و از ترکیب آنها به صورت ماتریسی رابطه ای ماتریسی برای KVL بدست آورید.

حل: چون DC است پس عنصرها فقط مقاومتند.



عنصر k ام

درحالت کلی KVL: $v_k = v_{sk} + R_k(j_k - j_{sk})$

از رابطه بالا j_k را حساب می کنیم:

$$j_k = j_{sk} + G_k(v_k - v_{sk})$$

$$G_k \rightarrow \left(\frac{1}{R_k}\right)$$

$k=1: \quad j_1 = j_{s1} + G_1(v_1 - v_{s1})$

$k=2: \quad j_2 = j_{s2} + G_2(v_2 - v_{s2})$

$\vdots$

$k=b: \quad j_b = j_{sb} + G_b(v_b - v_{sb})$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{s1} \\ j_{s2} \\ \vdots \\ j_{sb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & G_b \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_{s1} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ v_{sb} \end{bmatrix} \right)$$

$$j = j_s + G(v - v_s)$$